数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 88-93

Wirsing System of Diophantine Inequalities

Noriko HIRATA-Kohno 平田典子
Department of Mathematics
College of Science and Technology
Nihon University
Suruga-dai, Kanda, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan
email hirata@math.cst.nihon-u.ac.jp
日本大学　理工学部　数学科

昨年に続き　Prof. J.-H. Evertse 氏 (Leiden) との共同研究のその後、Evertse らによる進展と、問題意識などについて、ここにまとめてみたい。

---

(1) 導入

まず Mahler Measure とよばれるものの定義を述べる。

定義　多項式 $f(X) = a_0(X-\xi_1)\cdots(X-\xi_t) \in \mathbf{C}[X]$ に対し、$f(X)$ の Mahler Measure を

$$M(f) = |a_0|\prod_{i=1}^{t}\max(1, |\xi_i|)$$

と定める。多項式 $f \in \mathbf{Z}[X]$ が primitive とは、その整数係数が gcd 1 で、かつ、ここでは leading coefficient > 0 のときにいうとする。

$\mathbf{Q}$ 上有限次の代数的数 ξ の Mahler Measure は、ξ の $\mathbf{Z}$ 上の最小多項式を $f \in \mathbf{Z}[X]$ としたとき、つまり、primitive、$\mathbf{Z}$ 上既約な $f \in \mathbf{Z}[X]$ で $f(\xi) = 0$ をみたすものをとったとき、

$$M(\xi) = M(f)$$

とする。

注意　$\mathbf{Q}$ 上 t 次の代数的数 ξ の logarithmic absolute height を $h(\xi)$ とすると、

$$h(\xi) = \frac{1}{t}\log M(\xi)$$

以下、$\mathbf{Q}$ 上 t 次の代数的数 ξ の $\mathbf{Q}$ 上共役な元 $\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(t)}$ に対しては、何でも良いから、ひとつ順序を固定することにする。
さて、我々は次の問題を考えよう。

t を正整数、$\kappa > 0$ とする。α を代数的数とする。$\mathbf{Q}$ 上 t 次の代数的数 ξ で、次の不等式をみたすものを考える。

$$(*) \qquad |\alpha - \xi| < M(\xi)^{-\kappa}$$

この (*) が解 ξ を有限個しかもたないための十分条件はなにか。

1971 年に E. Wirsing が $\kappa > 2t$ ならば (*) の解 ξ は有限個を示し、Roth の予想を解いた。独立に Schmidt が $\kappa > t+1$ ならば (*) は有限個の解しか持たないことを証明した（1970 年）。後者は Schmidt の部分空間定理からも従う。$t+1$ は best possible である。従って上の問いには答えがある。
ではこれを連立不等式として考えた Wirsing System (W) を定義する。

定義 I を $\{1,\ldots,t\}$ の空でない部分集合とする。γ_i $(i \in I)$ を代数的数とし、φ_i $(i \in I)$ を非負実数とする。

$$(W) \qquad |\gamma_i - \xi^{(i)}| < M(\xi)^{-\varphi_i} \quad (i \in I)$$

を、$\mathbf{Q}$ 上 t 次の代数的数 ξ を未知数として考える。このディオファントス連立不等式 (W) を、Wirsing System と呼ぶ。

Wirsing [W] は、どんな代数的数の組 γ_i $(i \in I)$ と、

$$\sum_{i \in I} \varphi_i > 2t \cdot \sum_{k=1}^{\#I} \frac{1}{2k-1}$$

をみたすどんな非負実数の組 φ_i $(i \in I)$ に対しても、次数 t の代数的数 ξ で (W) をみたすものは、有限個であることを示した。Evertse は、この同じ条件下で、個数の上からの評価を示した [E2]。

Wirsing System の解の個数の有限性と、Evertse ら により考察された Resultant Inequality と呼ばれるものの解の個数の有限性は同値であることを昨年報告した。また、同じ指数でも、解が無限個にも有限個になる例も調べ、κ つまり $\sum_{i\in I}\varphi_i$ のみで解の無限性と有限性が分かれないことも観察した

今回はもっと広い範囲でも有限個の場合もあることと、定量的な話を述べる。

(2) 記号と結果

Resultant Inequality (R) を定義する。

定義　まず、2個の多項式 $f, g \in \mathbf{Z}[X]$ をとり 、fの次数は r、gの次数は t とする。

$f = a_0X^r + a_1X^{r-1} + \cdots + a_r \quad (a_0 \neq 0)$、$g = b_0X^t + \cdots + b_t \quad (b_0 \neq 0)$ と表す。

f, gの Resultant とは、位数 $r+t$ の行列式

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_r \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_t & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_t \end{vmatrix}$$

(最初の t 行は fの係数、最後の r行は gの係数)。

$f(X) = a_0 \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$, $g(X) = b_0 \prod_{j=1}^{t}(X - \xi_j)$, に対しては、

$$R(f,g) = a_0^t b_0^r \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} (\alpha_i - \xi_j).$$

となる事が知られている。

定義　$f \in \mathbf{Z}[X]$ の次数は rとし、この fは固定。$\kappa > 0$ とする。$g \in \mathbf{Z}[X]$ の次数は t とし、この gを未知式として、

$$(R) \qquad 0 < |R(f,g)| < M(g)^{r-\kappa}$$

をみたすものを考え、Resultant 不等式と呼ぶ。

注意　$r < \kappa$のときは、(R) の右辺は 1 未満なので、$|R(f,g)| \geq 1$ とあわせると (R) は解なし。

昨年述べたように Wirsing System の解の有限性と、Resultant Inequality のそれとは、同値性がある。これと、Schmidt の考察 [Schm2] を使うと、次が得られる。そのために一つ定義を述べる。

定義　既約多項式 $f \in \mathbf{Z}[X]$ が t times transitive　とは、
2 組の tuples $(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_t})$, $(\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_t})$ で distinct zeros of f　からなる任意のものを考えるときその 2 組の間に必ず $\mathbf{Q}$-isomorphism σ で $\sigma(\gamma_{i_k}) = \gamma_{j_k}$ $(k = 1, \ldots, t)$ となるものが存在するときに言う。

定理
(ア)　$f \in \mathbf{Z}[X]$ を degree r　の既約多項式とする。f　は t times transitive とする。 $\kappa > t+1$ と仮定する。このとき (R) は degree t の多項式 $g \in \mathbf{Z}[X]$ を有限個しか解に持たない。
(イ) γ_i $(i \in I)$ は既約多項式 $f \in \mathbf{Z}[X]$ の zeros とし、fは t times transitive とする。 $\sum_{i \in I} \varphi_i > t+1$　を仮定する。このとき (W) は degree t の代数的数ξを有限個しか解に持たない。

(ア) は [Schm2] の議論による。(イ) は我々の同値性から従う。

実際にはおそらく、$\sum_{i \in I} \varphi_i > t+1$ または $\kappa > t+1$ ならば、一般的に (W), (R) は有限個しか解を持たないのだと思われ、特別なγ_i もしくは fにたいしてのみ、$2t > \sum_{i \in I} \varphi_i > t+1$ の場合は解が無限個になると思われる。
しかしこれがいつなのかは、あまり分からず、いくつか簡単な例があるのみである。
要するに $2t > \sum_{i \in I} \varphi_i > t+1$ の場合は無限個、有限個の両方があり得るわけで、これはγ_iによる違いのせいだとと考える以外にない。

では定量的な話に移ろう。

さて I を空で無い $\{1, \ldots, t\}$ に部分集合とする。γ_i $(i \in I)$ を代数的数で

$$\max_{i \in I} M(\gamma_i) \leq M, \quad [\mathbf{Q}(\gamma_i : i \in I) : \mathbf{Q}] = r$$

なるものとする。
φ_i $(i \in I)$ を非負実数とする。さらに、$0 < \delta < 1$ とする。$\theta := \left(\sum_{i \in I} \varphi_i\right) - 2t$ とおく。

Evertse [E2] [E3] は

$$\sum_{i\in I}\varphi_i \geq (2t+\delta)\sum_{k=1}^{\#I}\frac{1}{2k-1}$$

ならば Wirsing system (W) の解は高々

$$2\times 10^7\cdot t^7\delta^{-4}\log 4r\cdot\log\log 4r$$

個（large solutions : $M(\xi)\geq\max(4^{t(t+1)/\theta}, M)$ のとき）であることを示した。

従って (R) についても同値性から定量的結果（ただしあくまでも degree t の primitive, irreducible polynomials $g\in\mathbf{Z}[X]$ に対してのみ）が従う。昨年注意したように、primitive　でないか、または irreducible でない $g\in\mathbf{Z}[X]$ の定量化は、難しい予想を従えてしまうので、困難な問題であると思われる。

一方、平田 [H] は Quantitative Subspace Theorem の証明と Ru and Wong [Ru-Wong] の手法を用いて、別の定量化を (W) にたいして行い、large solutions が高々 $c_1(r,t)\delta^{-c_2}$ の形（ここで c_1, c_2 は effective 正定数、c_1は r,t にのみよる）となることを示した。証明には Nochka weight ([F], Section 2–4) の概念を用いる。

Evertse は次の結果も Resultant inequalities　について示した [E3]。

定理 [E3]　$f\in\mathbf{Z}[X]$ は degree r の多項式で重根を持たないとする。$\kappa = 2t+\delta$、$0<\delta<1$ とする。もし

$$M(g)\geq\left(2^{2r^2}M(f)^{4r-4}\right)^{t/\delta}.$$

ならば、高々

$$2^{9t+60}t^{2t+20}\delta^{-t-5}r^t\log 4r\log\log 4r$$

個の primitive, irreducible な degree t の多項式 $g\in\mathbf{Z}[X]$ のみが (R) の解となる。

以下、文献をあげる。

References

[E1] Evertse, J.-H., An explicit version of Faltings' Product Theorem and an improvement of Roth's lemma. Acta Arith. 73 (1995), 215–248.

[E2] — The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number. In: Analytic Number Theory, Proc. conf. Kyoto, (1997), 53–83, Cambridge Univ. Press.

[E3] —On the number of solutions of resultant inequalities. In preparation.

[E-H] Evertse, J.-H., Hirata-Kohno, N., Wirsing systems and Resultant inequalities. to appear.

[F] Fujimoto, H., Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\mathbf{R}^m$, Aspects of Math. 21 (1993) Vieweg.

[H] Hirata-Kohno, N., On Wirsing systems of Diophantine inequalities. In preparation.

[Ru-Wong] Ru, M., Wong, P.M., Integral points of $\mathbf{P}^n \backslash \{2n+1$ hyperplanes in general position$\}$ Invent. Math. 106 (1991), 195–216.

[Schm1] Schmidt, W.M., Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals. Acta Math. 125 (1970), 189–201.

[Schm2] — Inequalities for resultants and for decomposable forms. In: Diophantine Approximation and its Applications, Proc. conf. Washington D.C.,ed. by C.F. Osgood, Academic Press, New York (1973), 235–253.

[Schm3] — Diophantine Approximation, Lecture Notes Math.785, (1980), Springer-Verlag.

[Schm4] — The number of rational approximations by algebraic numbers and the number of solutions of norm form equations, In: Number Theory and related topics, proc. Conf. Bombay, 1988, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 12, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1989, 195–202.

[Schm5] — Diophantine Approximations and Diophantine Equations. Lecture Notes Math.1467, (1991), Springer-Verlag.

[W] Wirsing, E., On approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree. In: Proc. Symp. Pure Math. 20, A.M.S., Providence, (1971), 213–248.